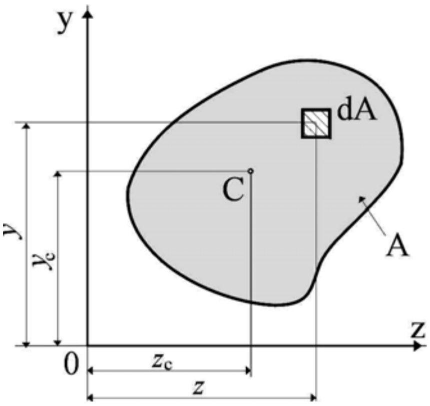
Понятие о геометрических характеристиках однородных поперечных сечений. Центр тяжести; статические моменты; моменты инерции – осевые, центробежный, полярный; моменты сопротивления; радиусы инерции. Главные оси и главные моменты инерции. Понятие об упруго-геометрических характеристиках неоднородных сечений.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

2.1. Некоторые сведения о геометрических характеристиках

Геометрические характеристики – числовые величины (параметры), определяющие размеры, форму, расположение поперечного сечения однородного по упругим свойствам деформируемого элемента конструкции (и, как следствие, характеризующие сопротивление элемента различным видам деформации).



Рассмотрим произвольное поперечное сечение A (сечение бруса) с координатами центра тяжести z_c, y_c. В точке (z, y) выделим элемент площади dA. Основные геометрические характеристики поперечных сечений элементов конструкций (в том числе и данного сечения) описываются интегралами следующего вида

$$\int_A y^m \cdot z^n \cdot dA.$$

Рассмотрим некоторые характерные варианты записи этого интеграла и получим выражения для основных геометрических характеристик.

Площадь поперечного сечения

При m=0, n=0 интеграл приобретает вид

$$\int_A dA = A,$$

а соответствующая характеристика, как видим, представляет собой *площадь поперечного сечения* элемента.

Оказывается, что во многих случаях деформирования тела знание только площади его поперечного сечения недостаточно.

Статические моменты

Если m=1, n=0, тогда получим характеристику

$$\int_A y \cdot dA = S_z,$$

которая называется *статическим моментом* относительно оси z,
или, при m=0, n=1,

$$\int_A z \cdot dA = S_y$$

статическим моментом относительно оси y.

Статический момент относительно данной оси – сумма произведений элементарных площадей dA на их расстояние до данной оси, взятая по всей площади сечения A.

На основании теоремы Вариньяна (из курса теоретической механики) следует, что

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_c \cdot A, \qquad S_y = \int_A z \cdot dA = z_c \cdot A,$$

а для сложного сечения (состоящего из нескольких простых, каждое из которых имеет площадь A_i и координаты собственного центра тяжести y_{c_i}, z_{c_i})

$$S_z = \sum y_{c_i} \cdot A_i, \qquad S_y = \sum z_{c_i} \cdot A_i .$$

Статический момент относительно какой-либо оси равен произведению всей площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.

Отсюда можем получить формулы для определения **координат центра тяжести** сечения:

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum y_{c_i} \cdot A_i}{\sum A_i}, \qquad z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum z_{c_i} \cdot A_i}{\sum A_i} .$$

Как видим, относительно осей, проходящих через *центр тяжести* сечения, статические моменты равны нулю, а сами эти оси называются *центральными*.

Размерность статических моментов – м^3 в системе СИ.

Осевые моменты инерции

Если m=2, n=0, тогда получим характеристику

$$\int_A y^2 \cdot dA = J_z ,$$

которая называется *осевым моментом инерции* относительно оси z,
или, при m=0, n=2,

$$\int_A z^2 \cdot dA = J_y \ –$$

осевым моментом инерции относительно оси y.

Осевой момент инерции относительно данной оси – сумма произведений элементарных площадей dA на квадрат их расстояний до данной оси, взятая по всей площади сечения A.

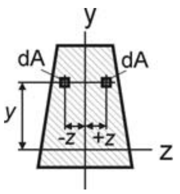
Центробежный момент инерции

Если m=1, n=1, тогда получим характеристику

$$\int_A z \cdot y \cdot dA = J_{zy} ,$$

которая называется *центробежным моментом инерции*.

Центробежный момент инерции относительно осей координат – сумма произведений элементарных площадей dA на их расстояния до этих осей, взятая по всей площади сечения A.



Если хотя бы одна из осей y или z является осью симметрии сечения, центробежный момент инерции такого сечения относительно этих осей равен нулю (так как в этом случае каждой положительной величине $z{\cdot}y{\cdot}dA$ можем поставить в соответствие точно такую же, но отрицательную, по другую сторону от оси симметрии сечения, см. рисунок).

Рассмотрим дополнительные геометрические характеристики, которые могут быть получены из перечисленных основных и также часто используются в расчетах на прочность и жесткость.

Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции J_p называют характеристику

$$J_p = J_z + J_y .$$

С другой стороны,

$$J_p = J_z + J_y = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A z^2 \cdot dA = \int_A \left(y^2 + z^2 \right) \cdot dA = \int_A \rho^2 \cdot dA .$$

Полярный момент инерции (относительно данной точки) – сумма произведений элементарных площадей dA на квадраты их расстояний ($\rho^2 = y^2 + z^2$) до этой точки, взятая по всей площади сечения A.

Размерность моментов инерции – м^4 в СИ.

Момент сопротивления

Момент сопротивления относительно некоторой оси – величина равная моменту инерции относительно той же оси отнесенному к расстоянию (y_{max} или z_{max}) до наиболее удаленной от этой оси точки

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}; \; W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} .$$

Размерность моментов сопротивления – м^3 в СИ.

Радиус инерции

Радиусом инерции сечения относительно некоторой оси, называется величина, определяемая из соотношения:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}, \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} .$$

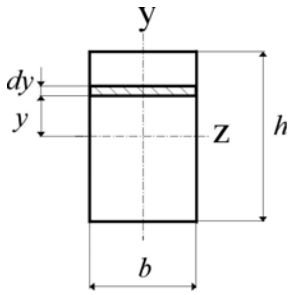
Радиусы инерции выражаются в м в системе СИ.

Замечание: сечения элементов современных конструкций часто представляют собой некоторую композицию из материалов с разным сопротивлением упругим деформациям, характеризуемым, как известно из курса физики, модулем Юнга E. В самом общем случае неоднородного сечения модуль Юнга является непрерывной функцией координат точек сечения, т. е. $E=E(z, y)$. Поэтому жесткость неоднородного по упругим свойствам сечения характеризуется более сложными, чем геометрические характеристики однородного сечения, характеристиками, а именно упруго-геометрическими вида

$$\int_A E(z, y) \cdot y^m z^n \, dA .$$

2.2. Вычисление геометрических характеристик простых фигур

Прямоугольное сечение



Определим осевой момент инерции прямоугольника относительно оси z.

Разобьем площадь прямоугольника на элементарные площадки с размерами b (ширина) и dy (высота). Тогда площадь такого элементарного прямоугольника (заштрихован) равна $dA=b\cdot dy$. Подставляя значение dA в первую формулу, получим

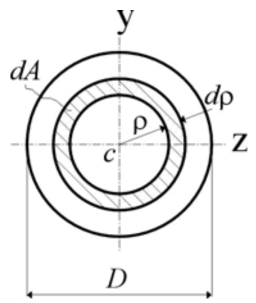
$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3}\bigg|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{b \cdot h^3}{12} .$$

По аналогии запишем

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} .$$

Подобным образом можно получить геометрические характеристики и для других простых фигур.

Круглое сечение



Сначала удобно найти полярный момент инерции J_p. Затем, учитывая, что для круга $J_z=J_y$, а $J_p=J_z+J_y$, найдем $J_z=J_y=J_p/2$.

Разобьем круг на бесконечно малые кольца толщиной $d\rho$ и радиусом ρ; площадь такого кольца $dA = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho$. Подставляя выражение для dA в выражение для J_p и интегрируя, получим

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^{D/2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32},$$

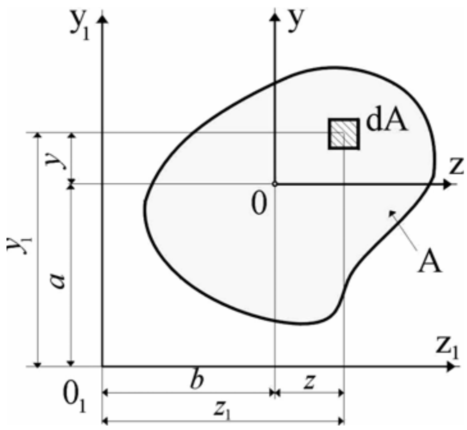
тогда

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} .$$

2.3. Вычисление моментов инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции произвольного сечения относительно центральных осей z и y:

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA ; \qquad J_y = \int_A z^2 \cdot dA ; \qquad J_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA .$$



Требуется определить моменты инерции этого сечения относительно «новых» осей z_1 и y_1, параллельных центральным и отстоящих от них на расстояние a и b соответственно:

$$J_{z_1} = \int_A {y_1}^2 \cdot dA; \quad J_{y_1} = \int_A {z_1}^2 \cdot dA; \quad J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 \cdot y_1 \cdot dA.$$

Координаты любой точки в «новой» системе координат $z_1 0_1 y_1$ можно выразить через координаты в «старых» осях z и y так:

$$z_1 = z + b; \; y_1 = y + a.$$

Подставляем эти значения в формулы для моментов инерции в «новых» осях и интегрируем почленно:

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y+a)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2 \cdot a \cdot \int_A y \cdot dA + a^2 \cdot \int_A dA,$$

$$J_{z_1} = J_z + 2 \cdot a \cdot S_z + a^2 \cdot A.$$

Так как оси z и y – центральные, то S_z=0.

Окончательно можем записать формулы «перехода» при параллельном переносе осей:

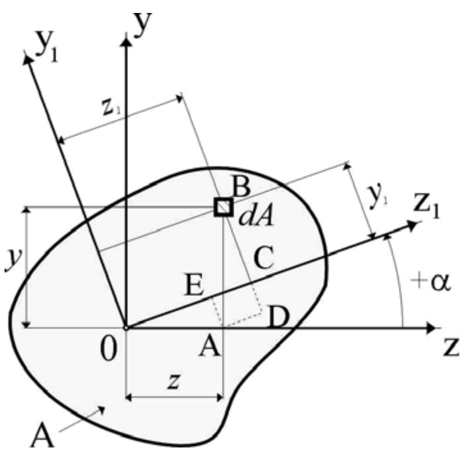
$$J_{z_1} = J_z + a^2 \cdot A;$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot A;$$

$$J_{y_1 z_1} = J_{yz} + a \cdot b \cdot A.$$

Отметим, что координаты a и b необходимо подставлять с учетом их знака (в системе координат $z_1 0_1 y_1$).

2.4. Вычисление моментов инерции при повороте координатных осей



Пусть известны моменты инерции произвольного сечения относительно центральных осей z, y:

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA; \; J_y = \int_A z^2 \cdot dA; \; J_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA.$$

Повернем оси z, y на угол α против часовой стрелки, считая угол поворота осей в этом направлении положительным.

Требуется определить моменты инерции относительно «новых» (повернутых) осей z_1 и y_1:

$$J_{z_1} = \int_A {y_1}^2 \cdot dA; \; J_{y_1} = \int_A {z_1}^2 \cdot dA; \; J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 \cdot y_1 \cdot dA.$$

Координаты элементарной площадки dA в «новой» системе координат $z_1 0 y_1$ можно выразить через координаты в «старых» осях так:

$$z_1 = OC = OE + AD = z \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha\,;$$

$$y_1 = BC = BD - EA = y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha\,.$$

Подставляем эти значения в формулы для моментов инерции в «новых» осях и интегрируем почленно:

$$J_{z_1} = \int\limits_A y_1^2 \cdot dA = \int\limits_A \left(y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha \right)^2 \cdot dA =$$

$$= \cos^2\alpha \cdot \int\limits_A y^2 \cdot dA - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int\limits_A z \cdot y \cdot dA + \sin^2\alpha \cdot \int\limits_A z^2 \cdot dA =$$

$$= J_z \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - J_{zy} \cdot \sin 2\alpha.$$

Проделав аналогичные преобразования с остальными выражениями, запишем окончательно формулы «перехода» при повороте координатных осей:

$$J_{z_1} = J_z \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - J_{zy} \cdot \sin 2\alpha\,; \qquad (2.1)$$

$$J_{y_1} = J_y \cdot \cos^2\alpha + J_z \cdot \sin^2\alpha + J_{zy} \cdot \sin 2\alpha\,; \qquad (2.2)$$

$$J_{z_1 y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{zy} \cdot \cos 2\alpha\,. \qquad (2.3)$$

Отметим, что если сложить два первых уравнения, то получим

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y = J_p\,,$$

т. е. полярный момент инерции есть величина и н в а р и а н т н а я (другими словами, неизменная при повороте координатных осей).

2.5. Главные оси и главные моменты инерции

До сих пор рассматривались геометрические характеристики сечений в произвольной системе координат, однако наибольший практический интерес представляет система координат, в которой сечение описывается наименьшим количеством геометрических характеристик. Такая «особая» система координат задается положением главных осей сечения. Введем понятия: главные оси и главные моменты инерции.

Главные оси – две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, при этом осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (максимум и минимум).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются г л а в н ы м и ц е н т р а л ь н ы м и о с я м и.

Моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**.

Главные центральные оси принято обозначать буквами u и v; главные моменты инерции – J_u и J_v (по определению J_{uv}=0).

Выведем выражения, позволяющие находить положение главных осей и величину главных моментов инерции. Зная, что J_{uv}=0, воспользуемся уравнением (2.3):

$$J_{uv}=\frac{J_z-J_y}{2}\cdot\sin 2\alpha_0+J_{zy}\cdot\cos 2\alpha_0=0.$$

Отсюда

$$tg2\alpha_0=-\frac{2\cdot J_{zy}}{J_z-J_y}. \qquad (2.4)$$

Угол α_0 определяет положение главных осей относительно любых центральных осей z и y. Угол α_0 откладывается между осью z и осью u и считается положительным в направлении п р о т и в часовой стрелки.

Заметим, что если сечение имеет ось симметрии, то, в соответствии со свойством центробежного момента инерции (см. разд.2.1, п.4), такая ось всегда будет главной осью сечения.

Исключая угол α в выражениях (2.1) и (2.2) с помощью (2.4), получим формулы для определения главных осевых моментов инерции:

$$J_{\substack{max\\min}}=\frac{J_z+J_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(J_z-J_y\right)^2+4\cdot J_{yz}^2}\,.$$

Запишем правило: ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей (z или y), относительно которой момент инерции имеет большее значение.